# Calculs élémentaires sur les radicaux

Note : ce cours suppose la maîtrise du développement, de la factorisation, des identités remarquables (en particulier  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ) et des règles de calcul sur les puissances.

# I) Qu'est-ce que la racine carrée ?

### 1) Définition

La racine carrée d'un nombre <u>positif</u> a, notée  $\sqrt{a}$ , est <u>l'unique nombre positif</u> tel que  $(\sqrt{a})^2 = a$ . Il n'existe pas de racine carrée pour des nombres négatifs\*.

\*enfin, si mais les racines carrées ne sont plus réelles

# 2) Application aux équations de la forme $x^2=a$

Soit un nombre réel a et l'on recherche tous les réels x tels que  $x^2=a$ . Plusieurs cas se présentent en fonction du signe de a:

- Si a<0, il n'y a pas de solution
- Si a=0, 0 est l'unique solution
- Si a>0,  $\sqrt{a}$  est solution mais  $-\sqrt{a}$  aussi car  $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = (-1)^2 * \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ . Donc  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$  sont les solutions de l'équation.

Autre démonstration : si a>0,  $x^2$ =a donc  $x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=0$  soit (identité remarquable) :  $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$ , on retrouve les deux solutions  $\pm\sqrt{a}$ .

3) Exemples:  $x^2=16$ ;  $x^2=0$ ;  $x^2=12$ ;  $x^2=-1$ ;  $x^2=a^2+b^2$ ;  $x^2=b-a$ ;  $x^2=1089$ ;  $x^2=\sqrt{a}$ .

# II) Opérations sur les racines carrées

#### 1) Produit

Attention! Il faut s'assurer de <u>l'existence des racines carrées</u> en question pour appliquer la formule suivante : pour a et b positifs,  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$ . En effet, si a ou b sont négatifs, alors  $\underline{ni} \sqrt{a} \underline{ni} \sqrt{b} \underline{n'existent}$ ! Or si a et b sont négatifs, ab>0 donc  $\sqrt{ab}$  existe.

#### 2) Somme

Il n'y a <u>pas de formule</u> exprimant un somme de racines carrées en fonction d'une autre racine carrée. Par exemple, en règle générale  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ .

3) 
$$\sqrt{x^2}$$

Un autre piège consiste à dire que  $\sqrt{x^2}=x$ , ce qui n'est vrai <u>que si x est positif</u>. Rappelons qu'une racine carrée est **toujours positive** donc si x<0,  $\sqrt{x^2}\neq x$ . En fait, si x<0,  $\sqrt{x^2}=-x$ . Dans le cas général, on appelle  $\sqrt{x^2}$  la **valeur absolue** de x. C'est un nombre positif, noté |x|, qui mesure « la distance à zéro ». Il s'agit en quelque sorte du nombre dépourvu de son signe.

# III) Techniques calculatoires

## 1) Simplification de radicaux

On cherche la plupart du temps à simplifier les radicaux  $\sqrt{x}$  sous la forme  $a\sqrt{b}$  avec **b** le plus petit possible. Pour s'aider, on peut décomposer **x** en facteurs premiers et faire apparaître le maximum de carrés sous la racine pour les sortir de la racine. Voir les exercices.

### 2) Réécriture de fraction

Ne me demande pas pourquoi, mais on n'apprécie pas d'avoir des radicaux au dénominateur d'une fraction. Pour ce faire, on écrit une fraction de la forme  $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}*\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ . A refaire en exercice...

## 3) Quantités conjuguées

On cherche souvent à simplifier des fractions de la forme  $\frac{1}{a+\sqrt{b}}$ . Pour ce faire on utilise l'identité remarquable  $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ :  $\frac{1}{a+\sqrt{b}}=\frac{(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$ . On appelle  $a+\sqrt{b}$  et  $a-\sqrt{b}$  des **quantités conjuguées** car leur produit donne un nombre simple, sans radicaux. A apprendre par la pratique !